The Literacy and Numeracy Secretariat
Le Secrétariat de la littératie et de la numératie

Ontario

Faire la différence ... De la recherche à la pratique

Une série de monographies sur la mise en pratique de la recherche produite en collaboration par le Secrétariat de la littératie et de la numératie et l'Ontario Association of Deans of Education

Comment les enseignantes et enseignants peuvent-ils aider leurs élèves à acquérir une profonde compréhension des mathématiques?

Selon les recherches

- C'est avec beaucoup de pratique que la plupart des enfants, avec certaines exceptions, apprennent éventuellement à utiliser les algorithmes traditionnels avec un certain degré de compétence. Le prix à payer pour l'acquisition de ces compétences est souvent trop élevé; c'est à leur détriment que les élèves apprennent à ignorer leur propre raisonnement et à s'en tenir à suivre des règles sans les comprendre.
- Les élèves qui sont encouragés à formuler leurs propres méthodes pour solutionner des problèmes mathématiques développent une compréhension nettement plus profonde des mathématiques.
- Ces élèves sont moins enclins à commettre d'erreurs que leurs camarades dans les salles de classe recevant un enseignement traditionnel des mathématiques.
- Ces méthodes sont utiles à tous les élèves - même ceux qui éprouvent des difficultés d'apprentissage en mathématiques.

ALEX LAWSON, PH.D., est professeure adjointe en enseignement des mathématiques à l'Université Lakehead. Elle a été coprésidente de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année du ministère de l'Éducation de l'Ontario. Alex dirige présentement une étude de six ans sur le développement de l'acquisition du sens des nombres chez les enfants dans le cadre de classes axées sur l'apprentissage par le questionnement. Son plus récent article, paru dans le journal of *Assessment in Education : Principles, Policy & Practice*, traite sur l'évaluation et la numératie.

Monographie no. 2

L'apprentissage des mathématiques ou l'application de règles : l'efficacité des méthodes générées par les élèves

par Alex Lawson, Ph.D.
L'université Lakehead

On observe depuis les vingt dernières années un changement marqué dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Ce changement survient à la suite des preuves manifestes indiquant que les élèves apprennent à appliquer les règles mathématiques sans toutefois acquérir une compréhension approfondie des concepts mathématiques[1]. Un constat particulièrement consternant découle d'une controverse voulant que, selon les chercheurs et les éducatrices et éducateurs, l'enseignement des mathématiques par transmission directe et selon nos méthodes traditionnelles basées sur l'application d'un ensemble de règles et de principes, semble être à la source des difficultés éprouvées par les élèves.

Erreurs typiques commises par les élèves

Les résultats de l'étude faite par Paul Cobb[2] au sujet de l'apprentissage des procédures pour l'addition de nombres à deux chiffres, par des élèves en 2e année, renforcent ces constatations. Au cours des entrevues qu'il a menées avec des élèves de la 1re et 2e année, Cobb leur a posé la question suivante : « Comment t'y prendrais-tu pour savoir combien font 16 + 9? » C'est au moyen de diverses méthodes, comme compter par exemple, que tous les élèves ont résolu le problème et répondu que la solution était 25. L'énoncé du même problème a ensuite été présenté aux élèves dans le style d'un manuel scolaire et imprimé dans un alignement vertical. Cette fois-ci, plusieurs des élèves ont préféré utiliser des algorithmes traditionnels. Beaucoup ont fait des erreurs que les enseignantes et enseignants du primaire pourraient reconnaître, et répondu que la solution était 15 ou 115. Lorsque Cobb demanda à une élève si sa première réponse, 25, et sa seconde réponse, 15, pouvaient être toutes les deux les solutions du même problème, l'élève lui fit remarquer que « Si on compte des bisenits [à la maison] 25 est la bonne réponse ... à l'école cette réponse (en pointant à l'endroit où elle avait écrit 15 sur sa feuille de travail) est toujours bonne » (p. 5).

Les rapports de recherche contiennent en effet de nombreux exemples où les algorithmes semblent favoriser l'occurrence d'erreurs « sanglantes ». Les élèves commettent ces erreurs typiques parce qu'ils appliquent et suivent des règles, telles que le « report » ou la « retenue », sans vraiment les comprendre. Nagel et Swingen[3] ont étudié la manière dont 52 élèves d'une école élémentaire utilisaient les algorithmes traditionnels pour résoudre des problèmes d'addition et de soustraction de nombres à deux chiffres devant être regroupés.

Le Secrétariat de la littératie et de la numératie a pour objectif de fournir, aux enseignantes et enseignants, les résultats de la recherche actuelle sur l'enseignement et l'apprentissage. Les opinions et les conclusions exprimées dans ces monographies sont, toutefois, celles des auteurs; elles ne reflètent pas nécessairement les politiques, les opinions et l'orientation du ministère de l'Éducation de l'Ontario ou celles du Secrétariat de la littératie et de la numératie.

Voici quelques unes des erreurs typiques qui ont été commises.

Figure 1. Erreurs « saugrenues » commises par les élèves pour la résolution de problèmes d'addition et de soustraction de nombres à deux chiffres (adapté de Nagel et Sztingen,[1] p. 167)

Calcul	Solution de l'élève
28 +29 471	Alena a débuté son calcul avec les nombres dans la colonne gauche. Elle a additionné 2 plus 2 et écrit 4 sous ces nombres. Elle a ensuite additionné 8 plus 9 et écrit 71, l'inversion du nombre 17, dans cette colonne pour finalement arriver à la réponse 471.
76 29 53	Andy a procédé de la façon suivante : « 7 moins 2 me donne 5. Ensuite, 9 moins 6 donne 3. » Sa réponse est 53 parce qu'il a déduit le nombre inférieur du nombre supérieur sans tenir compte de l'emplacement de celui-ci.
76 511 -29 -29 32	Kelly croyait qu'elle ne devait pas résoudre la soustraction 6 moins 9; elle a donc remplacer le 7 par 5 et ensuite « emprunter » 11 (deux 1) de la colonne des dizaines pour l'ajouter à la colonne des unités et ensuite procéder à la soustraction.

Les enfants ont de la difficulté à donner un sens à nos algorithmes nord-américains traditionnels—et avec raison. Ces algorithmes ont été développés au fil du temps afin d'optimiser l'efficacité et la précision avant l'ère des calculatrices.[2] Les algorithmes n'ont pas été conçus dans le but d'encourager le niveau de compréhension que nous attendons aujourd'hui des élèves, mais plutôt d'offrir de nombreux raccourcis pour un champ étendu des mathématiques – un champ souvent au-delà de la capacité de compréhension requise par l'élève moyen en 2e année pour apprendre à « emprunter ». C'est pourquoi il y a eu un mouvement important afin d'améliorer les compétences au moyen d'un enseignement qui, comme point de départ, tient compte des connaissances initiales des enfants.

Stratégies de résolution utilisées par les enfants

Il y a plus de vingt ans, Tom Carpenter et son équipe ont commencé leur recherche en demandant aux enfants de résoudre des problèmes sans leur enseigner directement des méthodes. Carpenter et son équipe ont découvert que les enfants ont généré une variété de stratégies de résolution pour solutionner un problème de division comme celui-ci : *La maman de Maria a confectionné 42 petits gâteaux qu'elle désire mettre dans 7 boîtes à gâteaux. Si elle place le même nombre de gâteaux dans chacune des boîtes, combien de gâteaux doit-elle mettre dans chaque boîte?*

- Au début, la plupart des enfants modélisent le problème en comptant les 42 articles ou en dessinant les 42 petits gâteaux, puis en dessinant les 7 boîtes et en « répartissant » les petits gâteaux un par un dans chacune des boîtes jusqu'à ce qu'ils soient tous distribués. Ils pourraient aussi choisir de compter ou de dessiner des groupes de 7 petits gâteaux et continuer à créer ces groupes jusqu'à ce qu'ils aient 42 petits gâteaux, pour ensuite recompter les groupes et déterminer le nombre dans chaque boîte. Pendant cette phase, les enfants procèdent à une représentation concrète de la situation en modélisant l'action du problème.

- Les enfants apprennent à remplacer ces procédures *directes* ou *concrètes* de *modélisation* par des stratégies pour compter; ils sautent souvent cette étape et font le compte à l'aide de leurs doigts. Ils font également des additions en utilisant parfois la stratégie du doublement (7 + 7 = 14), où ils doublent le résultat obtenu (14 + 14 = 28) puis, ils additionnent (14 + 28 = 42). Les enfants préfèrent souvent la méthode du doublement aux autres formes d'addition.

- Par la suite, ils utilisent l'information dérivée pour résoudre le problème. C'est-à-dire qu'ils élaborent des multiplications qu'ils connaissent, comme les multiplications par 5 qui sont plus faciles, pour solutionner ? x 7 = 42. Si l'on sait que 5 x 7 = 35, on peut donc ajouter un 7 de plus à la série. Éventuellement, la plupart des enfants résoudront ce problème comme une division (42 ÷ 7 = 6).

De nombreux projets de recherche à long terme ont réalisé des découvertes similaires, comme par exemple le rapport de Karen Fuson *Supporting Ten-Structured Thinking Projects*[3] et celui de Constance Kamii *Children Reinventing Arithmetic*.[4] Leurs recherches révèlent que les élèves dans ces salles de classe possèdent une compréhension beaucoup plus approfondie des mathématiques et qu'ils sont

visiblement plus satisfaits de leurs compétences que les élèves dans les classes d'enseignement traditionnel.

Ces idées s'étendent maintenant aux classes du cycle moyen.[10,11] Les élèves qui ont réussi à développer de solides compétences pour la résolution de problèmes mathématiques au moyen de leurs propres méthodes au cycle primaire, savent utiliser ces mêmes connaissances pour affronter les défis mathématiques au cycle moyen. Bien que les données relatives à l'efficacité des méthodes générées par les élèves ou sur la valeur d'algorithmes différents au cycle primaire soient limitées, des preuves croissantes indiquent que cette approche favorise une compréhension plus poussée et réduit le nombre d'idées fausses et d'erreurs commises comparativement à l'approche axée sur l'enseignement direct des algorithmes usuels.[12,13] De plus, les évidences recueillies indiquent que ces méthodes sont plus accessibles à tous – même aux élèves éprouvant des difficultés d'apprentissage en mathématiques.[11]

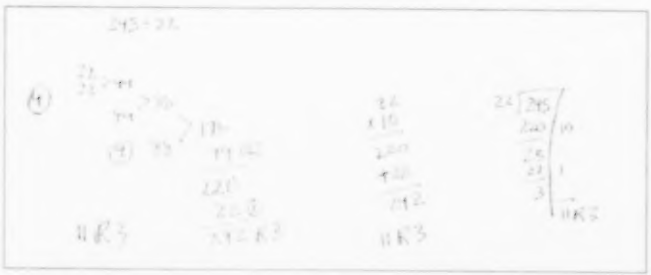
Répercussions sur les pratiques pédagogiques

Comment les enseignantes et enseignants peuvent appuyer l'apprentissage des mathématiques

Il est important de noter que la progression des stratégies individuelles de l'élève, en commençant par les procédures directes ou concrètes de modélisation et en progressant jusqu'aux algorithmes efficaces, qu'ils soient alternatifs ou usuels, n'est ni linéaire ni relative au développement. Cette progression est expérientielle – elle s'appuie sur l'expérience acquise dans les salles de classe où les enseignantes et enseignants offrent le soutien efficace nécessaire aux élèves pour leur permettre de résoudre les problèmes au moyen de leur propres méthodes. Comment les enseignantes et enseignants peuvent-ils réussir cette tâche?

Cela sous-entend qu'au cycle moyen, par exemple, l'enseignement de la division doit se faire au moyen d'un problème accessible et positionné dans un contexte familier plutôt que par l'enseignement d'une série d'étapes à suivre.

Figure 2. Méthodes générées par les élèves et des algorithmes alternatifs pour le problème 245 ÷ 22



- **Poser un problème** tel que : *Un large sac contient 245 bonbons M&Ms. Si nous partageons tous les bonbons entre les 22 élèves de la classe, combien de bonbons recevra chaque élève?*

- **Jumeler les élèves avec un partenaire ayant un niveau de compétence comparable en mathématiques** afin d'encourager la participation complète des deux élèves.

- **Permettre aux élèves de choisir la méthode qui leur convient le mieux pour résoudre le problème.** Les élèves peuvent résoudre le problème au moyen de l'addition, la multiplication, la soustraction ou la division (se référer aux deux premiers exemples de la Figure 2 pour des réponses typiques). Les élèves auront probablement besoin d'une période de classe complète pour résoudre le problème et se préparer à partager leurs idées au cours d'une discussion ou d'un échange sur les mathématiques à une date ultérieure.

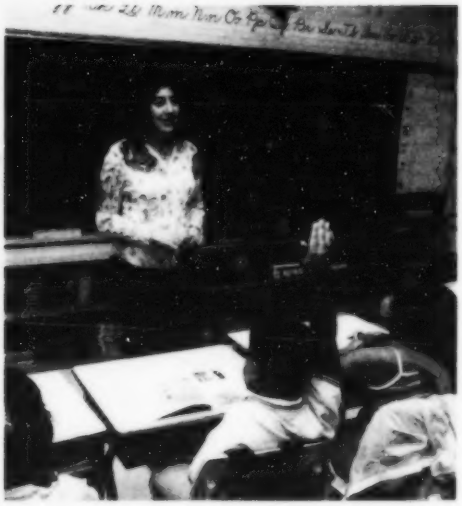
- **Pendant la période réservée à l'échange, faire progresser la réflexion des élèves en faisant ressortir une ou deux stratégies, ou « grandes idées ».** Par exemple, lorsque les élèves ont résolu un problème de division (tel que le problème avec les M&M) en utilisant différentes stratégies, il serait opportun de demander : *Pourquoi est-il possible de multiplier ou de diviser pour arriver à la même solution?* Les enseignantes et les enseignants peuvent se servir des diverses solutions proposées par les élèves pour explorer la « grande idée » que la multiplication est l'opération inverse de la division.[7] En plus d'appuyer les

Pour une discussion plus poussée...

- Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2003). *Stratégie de mathématiques au primaire : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques.* Imprimeur de la reine pour l'Ontario.
- Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2004). *Enseigner et apprendre les mathématiques : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année.* Imprimeur de la reine pour l'Ontario. Consulter les pages 7-27.
  En ligne à l'adresse : http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/reports/numeracy/panel/numeracyf.pdf
- van de Walle, J. (2007). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally Sixth Ed.* New York: Longman. Consulter les pages 216-224.

Des salles de classe en action ...

- Miller, L. (2004). Un bon calcul. L'École catholique St. Antoine et l'école publique Brookmede offrent des conseils sur la façon d'inspirer les jeunes en mathématiques. *Pour parler profession.* En ligne à l'adresse : http://www.oct.ca/publications/pour_parler_profession/juin_2004/math.asp



élèves à apprendre à calculer et à développer une compréhension et des compétences approfondies, ces méthodes permettent également aux enseignantes et enseignants d'optimiser le processus de réflexion des élèves pour accroître leurs connaissances en mathématiques – une optimisation impossible à réaliser lorsque les élèves sont restreints aux méthodes traditionnelles ou à une calculatrice.

- **Donner aux élèves de nombreuses opportunités de résoudre divers problèmes de division** afin qu'ils puissent cheminer vers la multiplication plus avancée ou la soustraction de groupe ou la soustraction à répétition. Ceci pourrait être le moment de leur enseigner l'algorithme continental de la division[10] ou la « division accessible »[11] ou bien la « division alternative »[12] afin de structurer leur pensée (se référer à la dernière solution de la Figure 2). Si les élèves savent déjà comment soustraire ou multiplier et additionner de plus grands multiples du diviseur, cette structure aura du sens pour eux et elle sera adoptée facilement. Finalement, les élèves contribueront probablement leurs propres algorithmes traditionnels (acquis à la maison) qu'ils pourront explorer au cours de leur étude des mathématiques et apprendre la raison pourquoi ils fonctionnent.

Il faut mentionner que cette approche exige un niveau de connaissances avancé dans le domaine des mathématiques et de l'enseignement, de la persévérance et de la patience. Beaucoup d'enseignantes et d'enseignants doutent de leur capacité d'enseigner et de l'habilité de leurs élèves à apprendre les mathématiques de cette façon.[13] Ils considèrent souvent les premières semaines particulièrement difficiles parce que les élèves, et parfois leurs parents, s'attendent à recevoir un enseignement direct des algorithmes – mathématiques comme ils la connaissent[14]. Toutefois, un des bénéfices futurs auquel on peut s'attendre avec ce style d'enseignement sera d'observer dans les salles de classe un nombre croissant d'enfants qui comprendront véritablement et apprécieront les mathématiques.

Références

1. Battista, M. (1999). The mathematical miseducation of America's youth. *Phi Delta Kappan*, 80(6), 425-433.
2. Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. Morrow (Ed.), *Teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
3. Cobb, P. (1991). Reconstructing Elementary School Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(2), 3-32.
4. Nagel, N., & Swinyard, C. C. (1998). Students' explanations of place value in addition and subtraction. *Teaching Children Mathematics*, 5(3), 164-170.
5. Ma, L. (2004, July). Arithmetic as a subject for learning mathematics: Dimensions of its intellectual challenge. In *International Congress of Mathematics Educators - 10* (Regular Lecture).
6. Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.
7. Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., et al. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.
8. Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic - 3rd Grade*. New York: Teachers College Press.
9. Kamii, C. (2000). *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory. 2nd Edition*. New York: Teachers College Press.
10. Back, J. M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In L. Morrow (Ed.), *Teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 151-160). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
11. Carroll, M. W., & Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. In *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 106-114).
12. Fuson, K. C. (2003a). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 300-305.
13. Fuson, K. (2003b). Developing mathematical power in whole number operations. In J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 68-94). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
14. Woodward, J., & Montague, M. (2002). Meeting the challenge of mathematics reform for students with LD. *Journal of Special Education*, 36(2), 89-101.
15. Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.
16. Anghileri, J., Beishuizen, M., & Van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 149-170.
17. Bushman, L. (2004). Teaching problem solving in mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 10 (6), 302-309.
18. Lester, J. (1996). Establishing a community of mathematics learners. In D. Schifter (Ed.) *What's happening in math class?* (pp. 88-102). New York: Teachers College Press.

Apprentissage professionnel

Le Secrétariat de la littératie et de la numératie a développé une série d'apprentissage professionnel pour aider les enseignantes et les enseignants à enrichir leurs connaissances et leur compréhension en mathématiques :

- **Ressources d'apprentissage professionnel**
  Ressources axées sur la littératie et la numératie.
  http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/reports/math/math.pdf
- **Connaissances requises pour l'enseignement des mathématiques**
  Webémission mettant en vedette Deborah Loewenberg Ball.
  www.curriculum.org/secretariat/november2f.html
- ***Making Mathematics Accessible to All Students***
  Webémission mettant en vedette Mary Lou Kestell, Kathryn Kubota-Zarivnij et Marian Small. Disponible en anglais à compter du 30 mars 2007.
  www.curriculum.org

Pour de l'information supplémentaire :
info@edu.gov.on.ca

Faire la différence ... De la recherche à la pratique est mise à jour tous les mois et publiée sur le site Web www.inspirelearning.ca/french/research/researchRoom.htm
ISSN 1913-1119 *Faire la différence ... De la recherche à la pratique* (imprimé)
ISSN 1913-1127 *Faire la différence ... De la recherche à la pratique* (en ligne)